CPSC 311 2016W1 Assignment 3 - Solution for Problem 1

Problem 1: Typing Derivations

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma(\mathsf{f}) = \mathsf{num} \to \mathsf{bool}}{\Gamma \vdash (\mathsf{Id\ f}) : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}}\ \text{Type-var} \qquad \dfrac{\Gamma(\mathsf{n}) = \mathsf{num}}{\Gamma \vdash (\mathsf{Id\ n}) : \mathsf{num}}\ \text{Type-var}}{\underbrace{\mathsf{n} : \mathsf{num}, \mathsf{f} : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}, \emptyset}_{\Gamma} \vdash (\mathsf{App}\ (\mathsf{Id\ f})\ (\mathsf{Id\ n})) : \mathsf{bool}}\ \text{Type-app}$$

Notes:

- In the above derivation, as we specified what Γ is defined to be, we are allowed to refer to it throughout the derivation. We could have chosen not to do that, and instead write out the typing context everywhere:

$$\dfrac{\dfrac{(\mathsf{n} : \mathsf{num}, \mathsf{f} : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}, \emptyset)\ (\mathsf{f}) = \mathsf{num} \to \mathsf{bool}}{\mathsf{n} : \mathsf{num}, \mathsf{f} : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}, \emptyset \vdash (\mathsf{Id\ f}) : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}}\ \text{Type-var} \qquad \dfrac{(\mathsf{n} : \mathsf{num}, \mathsf{f} : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}, \emptyset)\ (\mathsf{n}) = \mathsf{num}}{\mathsf{n} : \mathsf{num}, \mathsf{f} : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}, \emptyset \vdash (\mathsf{Id\ n}) : \mathsf{num}}\ \text{Type-var}}{\mathsf{n} : \mathsf{num}, \mathsf{f} : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}, \emptyset \vdash (\mathsf{App}\ (\mathsf{Id\ f})\ (\mathsf{Id\ n})) : \mathsf{bool}}\ \text{Type-app}$$

- But we must be careful not to change and redefine Γ midway through a typing derivation. Although it wasn't needed for this question, we can specify multiple typing contexts by indexing on them i.e. define different typing contexts as Γ_0, Γ_1, Γ_2, and so on.

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\checkmark}{\mathsf{n} : \mathsf{num}, \mathsf{f} : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}, \emptyset \vdash (\mathsf{App}\ (\mathsf{Id\ f})\ (\mathsf{Id\ n})) : \mathsf{bool}}}{\mathsf{f} : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}, \emptyset \vdash (\mathsf{Lam\ n\ num}\ (\mathsf{App}\ (\mathsf{Id\ f})\ (\mathsf{Id\ n}))) : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}}\ \text{Type-lam}}{\emptyset \vdash (\mathsf{Rec\ f\ num} \to \mathsf{bool}\ (\mathsf{Lam\ n\ num}\ (\mathsf{App}\ (\mathsf{Id\ f})\ (\mathsf{Id\ n})))) : \mathsf{num} \to \mathsf{bool}}\ \text{Type-rec}$$

Notes:

- We derive the premise of Type-lam by writing a checkmark above the judgment as we already derived it in part (a). In such a case, as we are not applying a rule, we do not place a line on top of the judgment nor do we write any rule name.